АБИТУРІЄНТУ ВНЗ:
підготовка до зовнішнього незалежного оцінювання
(*розв'язання тригонометричних рівнянь з параметрами*).

Санки до зими готуй влітку.
Народна мудрість.

ВСТУП

Фізико технічний ліцей при ХНТУ і ДНУ м. Херсона є закладом освіти для обдарованої та здібної молоді, де здійснюється підготовка майбутніх фахівців для різних галузей виробництва, органів державного управління та професіоналів у економічній, педагогічній, науковій та інших сферах.

Реалізація цих завдань значною мірою залежить від роботи вчителя математики, який здійснює підготовку випускників з предмета. Багато років ми збирали, розв'язували, систематизували завдання вступних екзаменів з математики, які пропонувались абітурієнтам у різні вищі навчальні заклади України та Росії . Але зараз головною метою є підготовка до ЗНО.

Мета цієї публікації – ознайомити вчителів математики з одним із можливих підходів до вивчення нетрадиційної для шкільної програми і непростої для учнів теми «тригонометричні рівняння з параметрами».

Розв'язати рівняння з параметрами – *значить для будь якого припустимого значення параметра знайти множину всіх розв'язків даного рівняння*. Таким чином розв'язання задач з параметром відрізняється від розв'язання аналогічної задачі без параметра, необхідністю дослідити поведінку розв'язання при всіх припустимих значеннях параметра.

Всі тригонометричні рівняння з параметрами ми поділили на такі групи:

- Для кожного значення параметра a розв'язати рівняння.
- При яких значеннях параметра a рівняння має розв'язки? Знайти ці розв'язки.
- Знайти кількість розв'язків даних рівнянь у залежності від параметра на вказаному інтервалі.

Щоб добре розв'язувати тригонометричні рівняння з параметрами необхідно добре оволодіти такими темами:

- Розв'язок тригонометричних рівнянь без параметрів.
- Розв'язок алгебраїчних рівнянь.
- Властивості квадратичної функції і умови розміщення її коренів на числовій вісі.
- Побудова і перетворення графіків функції.

Добірка задач за темою
«Тригонометричні рівняння з параметрами»

I.) Розв'язати рівняння відносно x :

1. $\sin(x-5)=m-1$

Розв'язання

Відомо , що $\sin f(x)\in[-1;1]$,

$-1\le m-1\le 1$

$0\le m\le 2$

Отже $m\in[0;2]$

Звідки $x-5=(-1)^k\arcsin(m-1)+\pi k,\quad k\in Z$

$x=5+(-1)^k\arcsin(m-1)+\pi k,\quad k\in Z$

Відповідь: якщо $m\in[0;2]$, то $[=5+(/1)^k ark\sin(m-1)+\pi k,\quad k\in Z$.

2. $\cos(3x+1)=b$

Розв'язання

Відомо ,що $\cos f(x)\in[-1;1]$, і $b\in[-1;1]$

Звідки: $3x+1=\pm\arccos b+2\pi n,\quad n\in Z$

$$x=-\frac{1}{3}\pm\frac{1}{3}\arccos+\frac{2\pi n}{3},\qquad n\in Z$$

Відповідь: якщо $b\in[-1;1]$, то $x=-\dfrac{\pi}{3}\pm\dfrac{1}{3\arccos b}+\dfrac{2\pi n}{3},\quad n\in Z$.

3. $tg|x-2|=a$

Розв'язання

$|x-2|=arctg a+\pi n,\quad n\in Z$

Дослідимо праву частину цього рівняння

$arctg\, a+\pi n\ge 0$

Отримуємо 2 випадки:

а) якщо $a\ge 0$, то $n\ge 0,\ n\in Z$

б) якщо $a<0$, то $n>0,\ n\in N$

Звідти отримуємо

$x=2\pm arctg\, a+\pi n,$ де $n\in Z\ (n\ge 0)\ \ при\ \ a\ge 0,\ \ і\ \ n\in N\ \ при\ \ a<0$.

Відповідь: $x=2\pm arctg\, a+\pi n,\quad де\ n\in Z\quad (n\ge 0)\ при\ a\ge 0\qquad і\qquad n\in N\ при\ a<0$.

4. $ctg\sqrt{x-5}=b-2$

Розв'язання

$x\in[5;\infty)$

$\sqrt{x-5}=arcctg(b-2)+\pi n,\quad n\in Z\quad (?)$

$$\begin{cases} x-5=(arcctg(b-2)+\pi n)^2 \\ arcctg(b-2)+\pi n\ge 0 \end{cases}$$

Отже $n\ge 0,\ n\in Z;\quad x=5+(arcctg(b-1)+\pi n)^2$

Відповідь: $x=5+(arcctg(d-2)+\pi n)^2\ \ де\ \ n\in Z\ (n\ge 0)$.

II.) Для кожного значення параметра a розв'язати рівняння. Знайти ці розв'язки.

1) $a\sin^2 x + 2(a+2)\sin x + a + 1$

а) $a \neq 0$. Нехай $\sin x = t,\ t \in [-1;1],$, то $at^2 + 2(a+2)t + a + 1 = 0$.

Розглянемо квадратне рівняння:

$D_1 = (a+2)^2 - a(a+1) = a^2 + 4a + 4 - a^2 - a = 3a + 4$

$t = \dfrac{-(a+2) \pm \sqrt{3a+4}}{2a}$.

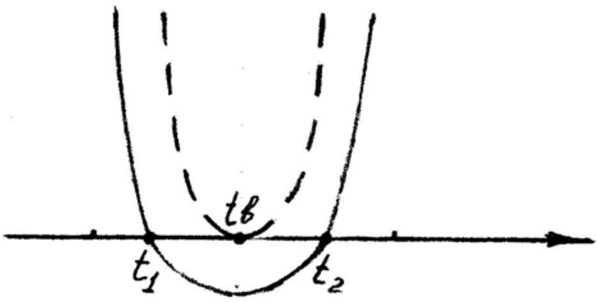
Дані корені рівняння повинні ввійти в проміжок $[-1;1]$. Розглянемо квадратичну функцію $f(t) = at^2 + 2(a+2)t + a + 1$, корені якої t_1 і t_2 належать проміжку $[-1;1]$. $t_b = -\dfrac{a+2}{a} = -1 - \dfrac{2}{a}$

$f(-1) = a - 4 + a + 1 = -3 < 0$

$f(1) = a + 2a + 4 + a + 1 = 4a + 5$

Розглянемо випадки:

а)

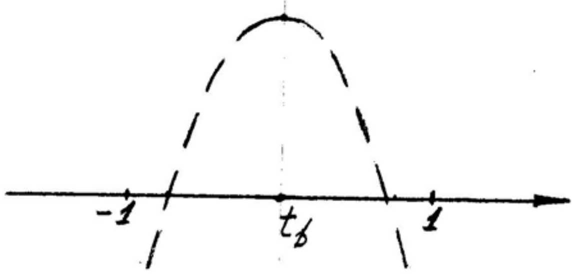


$$\begin{cases} a > 0 \\ D \geq 0 \\ -1 < t_b < 1 \\ f(-1) \geq 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases}$$

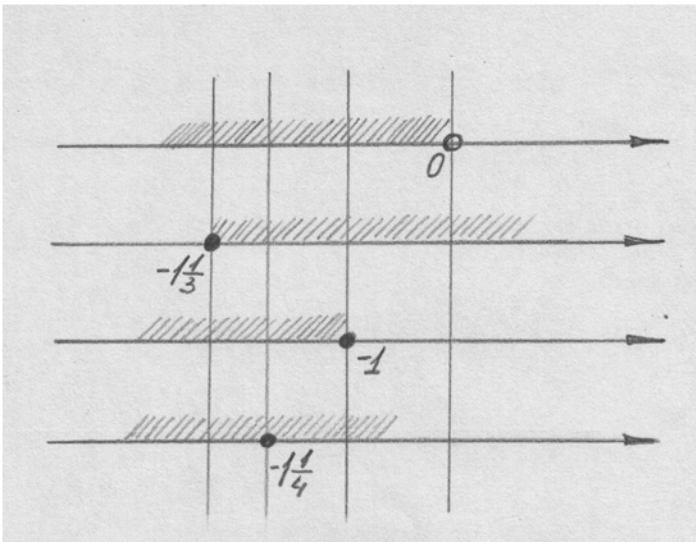
$$\begin{cases} a > 0 \\ 3a + 4 \geq 0 \\ 0 < -1 - \dfrac{2}{a} < 1 \\ -3 < 0 \\ 4a + 5 \geq 0 \end{cases}$$

Тому, що $f(-1) = -3$ система немає розв'язків.

б)



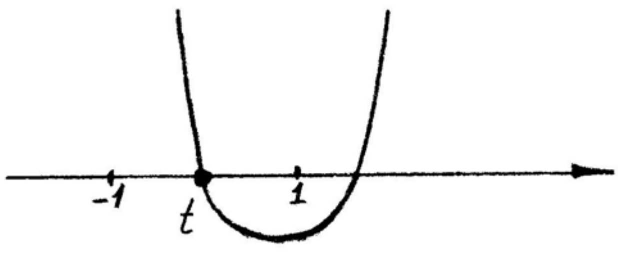
$$\begin{cases} a<0 \\ D\ge 0 \\ -1<t_b<1 \\ f(-1)\le 0 \\ f(1)\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<0 \\ 3a+4\ge 0 \\ -1-\dfrac{2}{a}<1 \\ -1-\dfrac{2}{a}>-1 \\ -3<0 \\ 4a+5\le 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a<0 \\ a\ge -1\dfrac{1}{3} \\ a<0 \\ a<-1 \\ a\le -1\dfrac{1}{4} \end{cases}$$



$$a\in\left[-1\frac{1}{3};-1\frac{1}{4}\right]$$

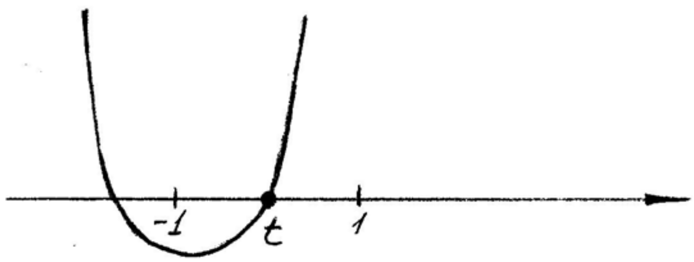
$$x=(-1)^n \arcsin\frac{-a-2\pm\sqrt{3a+4}}{a}+2\pi n \qquad n\in Z$$

в)

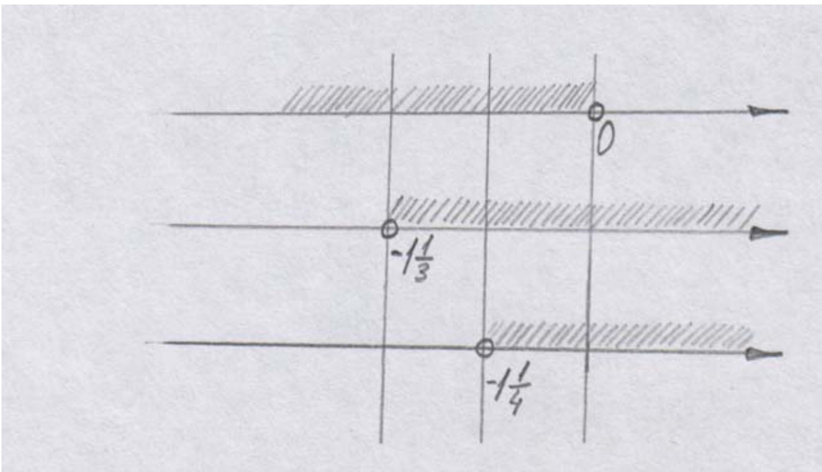


$$\begin{cases} a > 0 \\ D > 0 \\ f(-1) \geq 0 \\ f(1) < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a > 0 \\ 3a + 4 > 0 \\ -3 \geq 0 \\ 4a + 5 < 0 \end{cases} \qquad \varnothing$$

г)



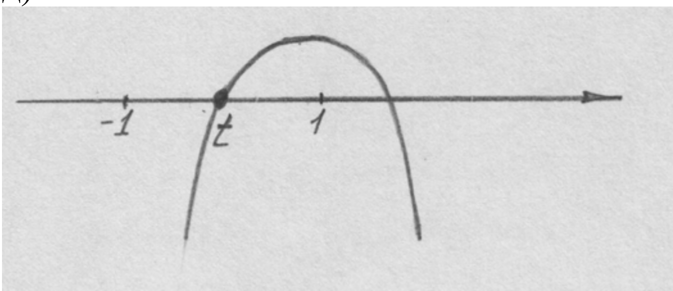
$$\begin{cases} a > 0 \\ D \geq 0 \\ f(-1) < 0 \\ f(1) \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a > 0 \\ 3a + 4 \geq 0 \\ -3 < 0 \\ 4a + 5 \geq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a > 0 \\ a > -1\frac{1}{3} \\ -3 < 0 \\ a \geq -1\frac{1}{4} \end{cases}$$



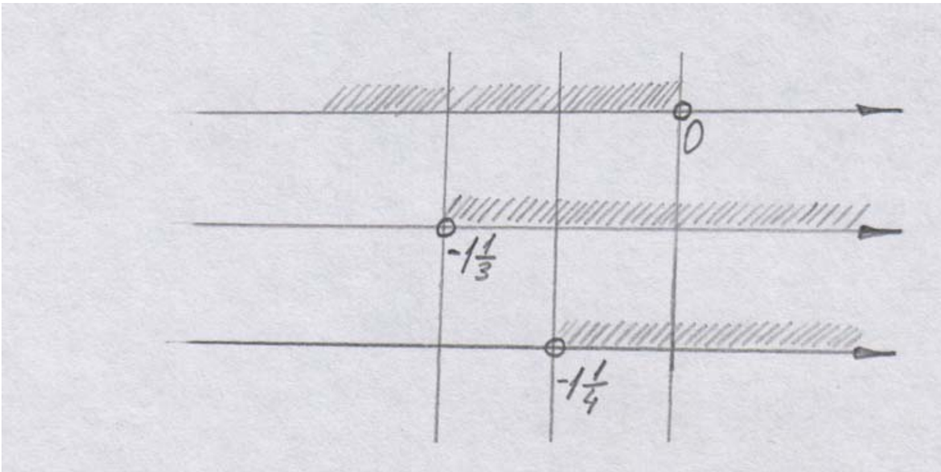
$a \in (0; \infty)$

$$x = (-1)^n \arcsin \frac{-a - 2 + \sqrt{3a+4}}{a} + \pi n, \qquad n \in Z$$

д)



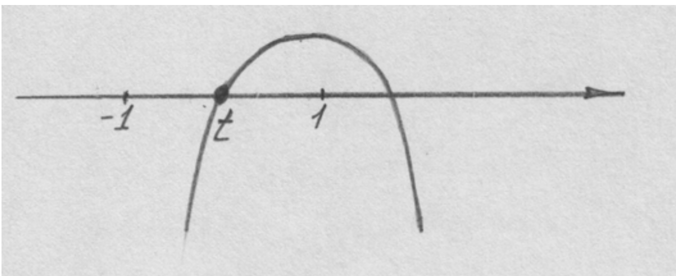
$$\begin{cases} a<0 \\ D>0 \\ f(-1)\le 0 \\ f(1)>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a>0 \\ 3a+4>0 \\ -3<0 \\ 4a+5>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a<0 \\ a>-1\frac{1}{3} \\ -3<0 \\ a>-1\frac{1}{4} \end{cases}$$



$a \in (-1\frac{1}{4};0)$

$x=(-1)^n \arcsin\dfrac{-a-2+\sqrt{3a+4}}{a}+\pi n, \qquad n\in Z$

е)



$$\begin{cases} a<0 \\ D>0 \\ f(-1)>0 \\ f(1)<0 \end{cases} \qquad \begin{cases} a<0 \\ 3a+4>0 \\ -3<0 \\ 4a+5<0 \end{cases}$$

Відповідь: якщо $a \in (-\infty;-7)$ нема розв'язків;

якщо $a \in \left[-\frac{4}{3};-\frac{5}{4}\right]$, то $x(-1)^n \arcsin\frac{-a-2+\sqrt{3a+4}}{a}+\pi n, \quad n \in Z$;

якщо $a \in (-\frac{5}{4};0) \cup (0;-\infty) \qquad x=(-1)^n \arcsin\frac{-a-2+\sqrt{3a+4}}{a}+\pi n,\ n \in Z$

якщо $a=0, \quad x=(-1)^{k+1} \arcsin\frac{1}{4}+\pi n, \quad n \in Z$

2) $\qquad 5\sin^2 x+\cos^2 x-3\sin x\cos x=a+4$

Зведемо дане рівняння до однорідного

$5\sin^2 x+\cos^2 x-3\sin x\cos x=(a+4)(\sin^2 x+\cos^2 x)$

$(1-a)\sin^2 x-3\sin x\cos x-(a+3)\cos^2 x=0$

Поділимо на $\cos^2 \neq 0$, дістанемо $\quad (1-a)tg^2 x-3tgx-(a+3)=0$

Розглянемо випадки

1) $\quad a=1, \quad mo \quad -3tgx-4=0, \quad tgx=-\frac{4}{3}$

$x=-arctg\frac{4}{3}+\pi n, \quad n \in Z$

2) $\quad a \neq 1$, то зведемо рівняння до алгебраїчного. Нехай $tgx=t$

$(1-a)t^2-3t-(a+3)=0$

$D=9+4(1-a)(a+3)=9+4(a+3-a^2-3a)=9+4(-a^2-2a+3)=9-4a^2-8a+12=$

$=-4a^2-8a+21$

а) $D=0$; $\quad 4a^2+8a-21=0; \quad a=\frac{-4\pm\sqrt{16+84}}{4}=\frac{-4\pm 10}{4}$

$$\left[\begin{array}{l} a=-\frac{7}{2} \\ a=\frac{3}{2} \end{array}\right. \qquad t=-\frac{-3}{2(1-a)}=\frac{3}{2(1-a)}$$

$a=-\frac{7}{2}, \quad t=\frac{3\cdot 2}{2\cdot 9}=\frac{1}{3} \qquad tgx=\frac{1}{3} \quad x=arctg\frac{1}{3}+\pi n, \quad n \in Z$

$a=\frac{3}{2}, \quad mo \quad t=\frac{3}{2\cdot(-\frac{1}{3})}=-3 \quad tgx=-3 \quad x=-arctg3+\pi n, \quad n \in Z$

б) $D>0$; $a\in(-\frac{7}{2};\frac{1}{2})$, то $t=\frac{3\pm\sqrt{-4a^2-8a+21}}{2(1-a)}$;

$$tgx=\frac{3\pm\sqrt{-4a^2-8a+2}}{2(1-a)}$$

$$x=arctg\frac{3\pm\sqrt{-4a^2-8a+2}}{2(1-a)}+\pi n,\quad n\in Z$$

в) $D<0$ $\left[\begin{array}{l} a<-\frac{7}{2} \\ a>\frac{3}{2} \end{array}\right.$ не має розв'язків.

Відповідь: якщо $a\in(-\infty;-\frac{7}{2})\cup(\frac{3}{2};\infty)$, то рівняння не має розв'язків;

якщо $a=-\frac{7}{2}$, то $x=arctg\frac{1}{3}+\pi n$, $n\in Z$;

якщо $a=\frac{3}{2}$, то $x=-arctg3-\pi n$, $n\in Z$;

якщо $a\in(-\frac{7}{2};\frac{3}{2})$, то $x=arctg\frac{3\pm\sqrt{-4a^2-8a+21}}{2(1-a)}+\pi n$, $n\in Z$.

3) $\frac{a-3a+9\sin^2 2x}{a-3\sin^2 2x}=0$

Розв'язок

Виконуємо рівносильні перетворення $\frac{a-3a+9\sin^2 2x}{a-3\sin^2 2x}=0$

$$\begin{cases} \sin^2 2x=\frac{2a}{9} \\ \sin^2 2x\neq\frac{a}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \sin^2 2x=\frac{2a}{9} \\ a\neq 0 \end{cases}$$

Проте $0\le\sin^2 2x\le 1$, тому рівняння має розв'язки,

якщо $0,a\le\frac{9}{2}$. Знайдемо його розв'язки:

$$\sin^2 2x=\frac{2a}{9}$$

$$\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{2a}{9}$$

$$\cos 4x=\frac{9-4a}{9}$$

$$x=\pm\frac{1}{4}\arccos\frac{9-4a}{9}+\frac{\pi n}{2},\quad n\in Z$$

Відповідь: якщо $a \in (-\infty;0] \cup \left(\frac{9}{2};\infty\right)$, то розв'язків немає;

якщо $a \in \left(0;\frac{9}{2}\right]$, то $x = \pm\frac{1}{4}\arccos\frac{9-4a}{9} + \frac{\pi n}{2}$, $n \in Z$

III) Знайти кількість розв'язків рівняння в залежності від параметра **a** на вказаному проміжку:

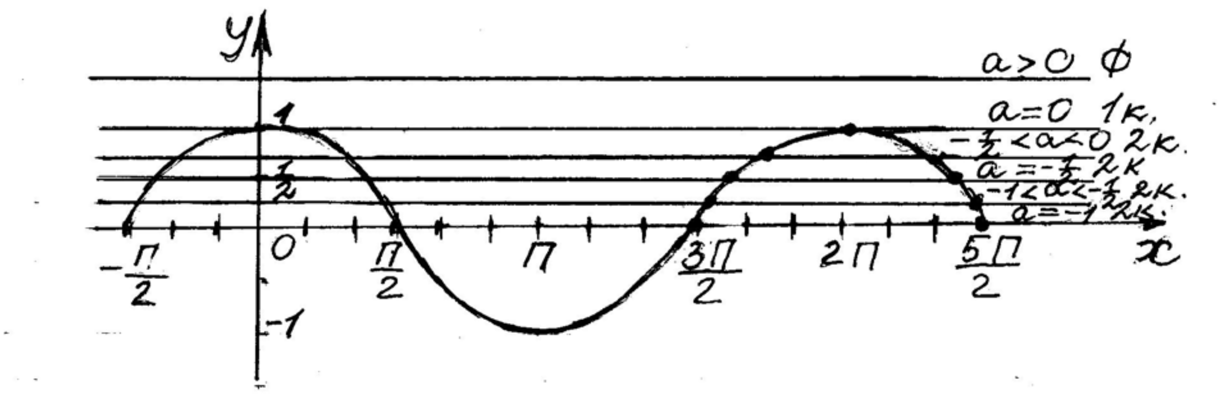
$2\cos^2 x - (2a+3)\cos x + a + 1 = 0$ $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$

Розв'яжемо рівняння відносно $\cos x$ рівняння:

Дістанемо $\left[\begin{array}{l}\cos x = a+1 \\ \cos x = \frac{1}{2}\end{array}\right.$

Рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$ на проміжку $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$ має 2 корені.

Розглянемо кількість коренів рівняння $\cos x = a+1$ на проміжку $\left[\frac{3\pi}{2};\frac{5\pi}{2}\right]$. Скориставшись графічним способом.



1) якщо $\left[\begin{array}{l}a+1>1;\ a>0 \\ a+1<0;\ a<-1\end{array}\right.$ рівняння немає розв'язків.

2) якщо $a+1=1;\ a=0$ рівняння має один корінь.

3) якщо $\frac{1}{2} < a+1 < 1;\ -\frac{1}{2} < a < 0$ має 2 корені.

4) якщо $a+1=\frac{1}{2},\ a=-\frac{1}{2}$ має 2 корені.

5) якщо $0 \le a+1 < \frac{1}{2}$ $-1 \le a < -\frac{1}{2}$ має 2 корені.

З урахуванням коренів рівняння $\cos x = \frac{1}{2}$, маємо

Відповідь: якщо $a \in \left[-1;-\frac{1}{2}\right) \cup \left(-\frac{1}{2}\right)$ - 4 корені;

якщо a=0 - 3 корені

якщо $a \in (-\infty;-1) \cup \left\{-\frac{1}{2}\right\} \cup (0;\infty)$ - 2 розв'язки.

Я вважаю, що задачам з параметрами повинна приділятися велика увага, особливо в класах з поглибленим вивченням математики, тому, що вони грають важливу роль у формуванні логічного мислення і математичної культури у школярів. Учні, яки володіють методами розв'язання задач з параметрами успішно справляються з будь-якими задачами.

Гудименко О.А. *– учитель математики фізико-технічного ліцею при ХНТУ і ДНУ, учитель вищої категорії, відмінник освіти України.*